Variations de fonctions.

Livre p.66.

Objectifs :

- Lire les variations d'une fonction sur sa représentation graphique, savoir vérifier par le calcul
- Reconnaître graphiquement un maximum, un minimum ; vérifier ce résultat par le calcul
- Savoir établir et utiliser un tableau de variations
- Savoir étudier et exploiter les variations d'une fonction affine

1. Étude des variations d'une fonction

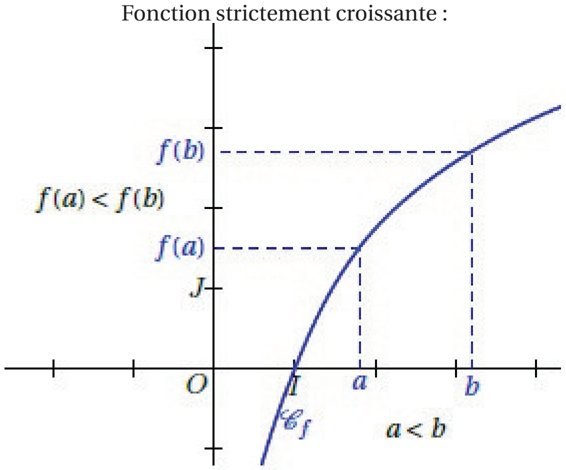
A. Sens de variation

Définition 7.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I :

- on dit que f est **strictement croissante** sur I lorsque pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$;
- on dit que f est **strictement décroissante** sur I lorsque pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

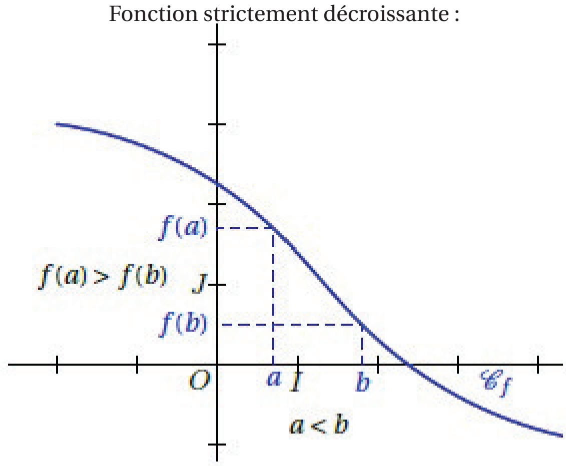
Interprétation graphique :

Fonction strictement croissante :



Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ "monte" lorsqu'on se déplace vers la droite.

Fonction strictement décroissante :

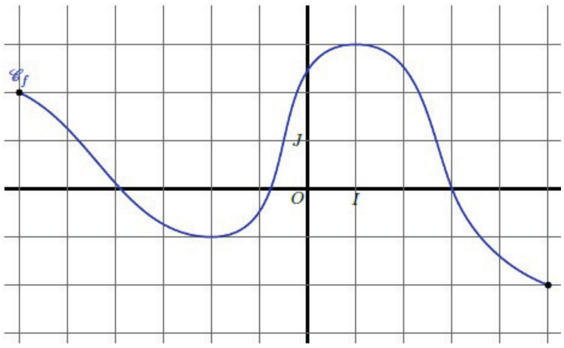


Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ "descend" lorsqu'on se déplace vers la droite.

B. Tableau de variation

Définition 7.2 Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est strictement croissante et ceux sur lesquels elle est strictement décroissante. On regroupe ces résultats dans un tableau appelé **tableau de variation**.

Exemple 1 : On a tracé ci-dessous la courbe représentant une fonction f définie sur l'intervalle $I = [-6; 5]$. En observant cette courbe, dresser le tableau de variation de f sur I.



En observant le graphique on remarque que :

- sur l'intervalle $[-6; -2]$, la courbe "descend" lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite : sur cet intervalle la fonction f est strictement décroissante ;
- sur l'intervalle $[-2; 1]$, la courbe "monte" lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite : sur cet intervalle la fonction f est strictement croissante ;
- sur l'intervalle $[1; 5]$, la courbe "descend" lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite : sur cet intervalle la fonction f est strictement décroissante.

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	-6		-2		1		5
f	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2

Les valeurs 2, -1, 3 et -2 placées dans le tableau sont les images respectives de -6, -2, 1 et 5. On les obtient ici par lecture graphique. Dans le cas où on connait l'expression de $f(x)$ en fonction de x, on les calcule.

Par convention, dans un tableau de variation, une flèche vers le bas signifie que la fonction est strictement décroissante sur l'intervalle considéré et une flèche vers le haut signifie qu'elle est strictement croissante.

Remarque : Lorsqu'une fonction a une (ou plusieurs) valeur(s) interdite(s), on l'indique dans le tableau de variation par une double barre verticale :
Prenons par exemple la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. La fonction f a une valeur interdite : $x = 0$ et on montrera dans un chapitre ultérieur qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.
On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

2. Extremums

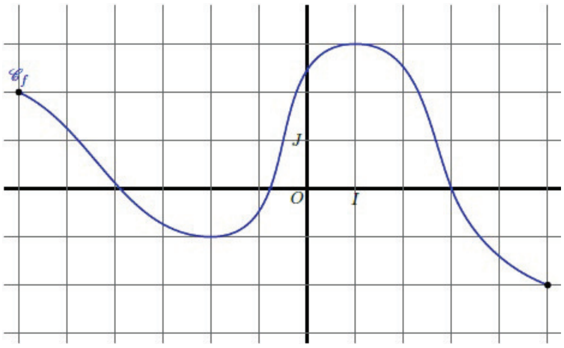
Pour les latinistes : le véritable pluriel du mot extremum serait plutôt extrema ; certains ouvrages utilisent cette dénomination.

Définition 7.3 Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; et soit $a \in I$:

- on dit que $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$. On dit aussi que f atteint son maximum sur I pour $x = a$;
- on dit que $f(a)$ est le **minimum** de f sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$. On dit aussi que f atteint son minimum sur I pour $x = a$.

Dans les deux cas on dit que $f(a)$ est un extremum pour f sur I.

Exemple 1 : le maximum de f sur $[-6; 5]$ est 3 ; il est atteint pour $x = 1$. Le minimum de f sur ce même intervalle est -2 ; il est atteint pour $x = 5$. Toujours dans cet exemple, $f(-2) = -1$ est un minimum pour f sur l'intervalle $[-6; 1]$.



Remarque :
Pour montrer que m est le minimum d'une fonction f sur un intervalle I il suffit de montrer que :

- pour tout $x \in I$ on a $f(x) - m \geq 0$;
- et qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = m$.

De même, M est le maximum d'une fonction f sur un intervalle I si :

- pour tout $x \in I$ on a $f(x) - M \leq 0$;
- et s'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = M$.

3. Cas des fonctions affines

Définition 7.4 Une *fonction affine* est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ où m et p sont deux nombres réels.
Si $p = 0$ alors f est une *fonction linéaire*.

Propriété 7.1 On considère une fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Tableaux de variations d'une fonction affine :

Si $m > 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\nearrow$	

Si $m = 0$:

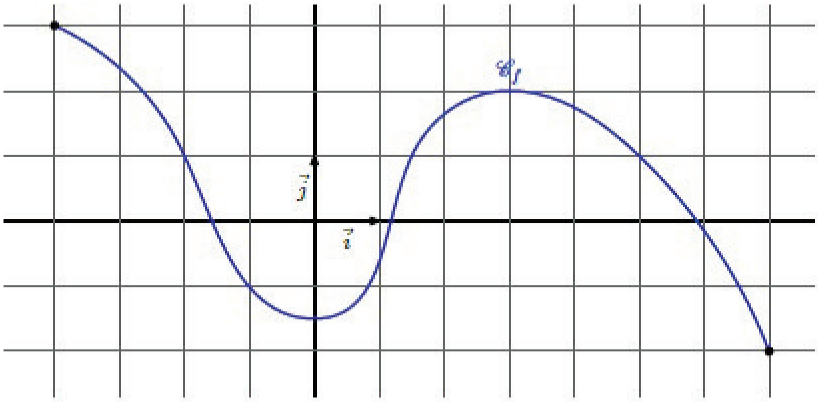
x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\longrightarrow$	

Si $m < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\searrow$	

4. Résolutions graphiques

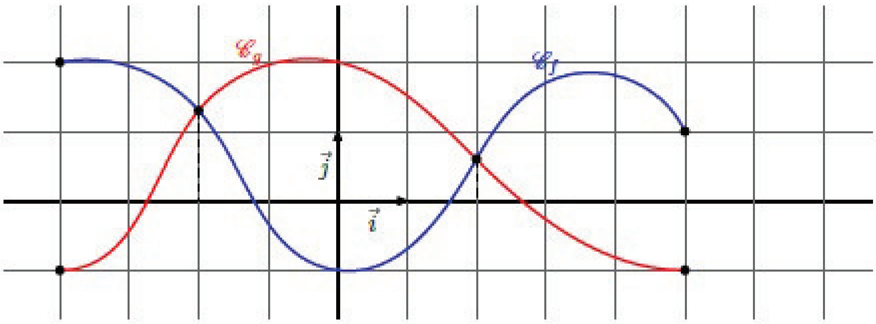
Nous avons déjà vu dans le chapitre 5 comment résoudre graphiquement les équations et inéquations les plus simples. N'oublions pas que les résolutions graphiques ne fournissent que des valeurs approchées.



Exemple 2 : Pour la fonction f représentée par la courbe ci-dessus et définie sur l'intervalle $[-4;7]$, on a :
- L'**équation** $f(x) = 2,5$ a une solution unique sur $[-4;7]$ car un seul point de $\mathscr{C}_f$ a pour ordonnée $2,5$: il s'agit du point ayant pour abscisse environ $-3,3$. On écrit : $S = \{-3,3\}$.
- L'équation $f(x) = 1$ a trois solutions : $S = \{-2;1,5;5\}$.
- L'équation $f(x) = -3$ n'a pas de solution car la courbe n'a pas de point d'ordonnée -3 ;
on écrira $S = \emptyset$, où $\emptyset$ signifie "**l'ensemble vide**".
- L'**inéquation** $f(x) < 1$ a pour solutions : $S =]-2;1,5[\cup]5;7[$.

Méthode :
Résoudre l'**équation** $f(x) = g(x)$, c'est trouver les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

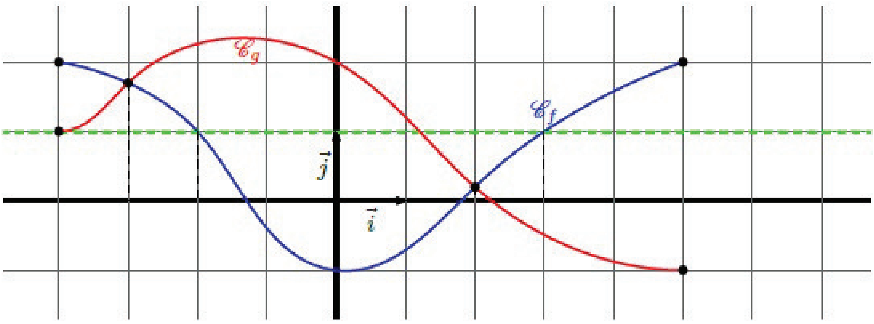
Exemple 3 : Dans le repère ci-dessous, on a tracé les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4;5]$.



Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$: $S = \{-2;2\}$.

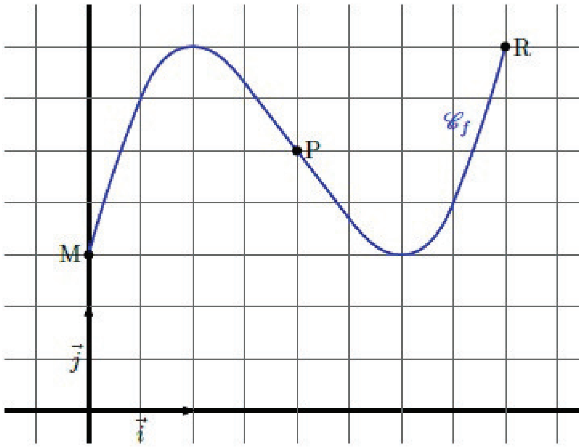
Méthode :
Résoudre l'**inéquation** $f(x) < g(x)$, c'est trouver les abscisses de tous les points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de $\mathscr{C}_g$.

Exemple 4 : Dans le repère ci-dessous, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4;5]$.



– les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses de tous les points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de (ou sur) $\mathscr{C}_g$: $S = [-3; 2]$.
– les solutions de l'inéquation $f(x) > 1$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés strictement au-dessus de la droite d'équation $y = 1$: $S = [-4; -2[\cup]3; 5]$.

A ton tour :
Sur la figure ci-contre, on a tracé la courbe représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 4]$.
Soit g la fonction définie sur $[0; 4]$ par $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.
1. Tracer la représentation graphique de g (c'est une droite, donc il suffit d'en déterminer deux points).
2. Résoudre l'équation $f(x) = 2,5$.
3. Résoudre l'équation $g(x) = f(x)$.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$.
5. Résoudre l'inéquation $g(x) \geq 2$.



5. Synthèse sur les variations de fonctions

Sens de variation :

- f est **strictement croissante** sur I ssi pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$;
- f est **strictement décroissante** sur I ssi pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

Extrema :

- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I ssi pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$.
- $f(a)$ est le **minimum** de f sur I ssi pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$.

Ces résultats sont regroupés dans un tableau de variations.